RBT

RED BUILDING TEAM

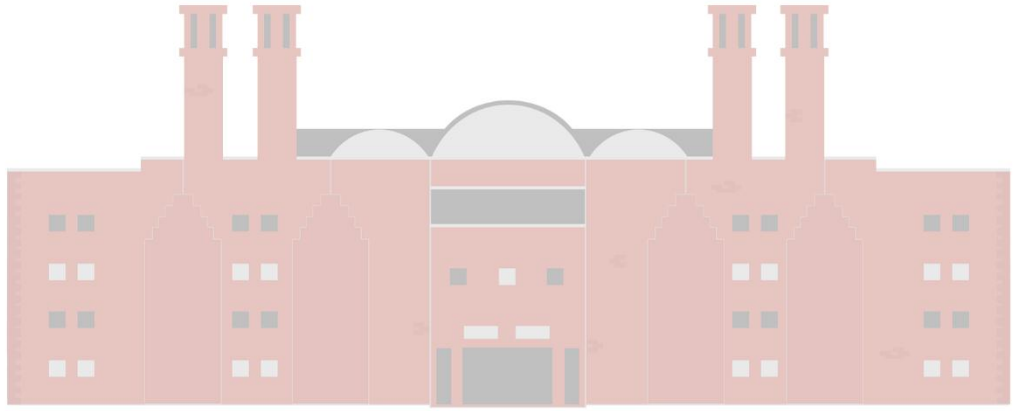
قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

السنة الثانية / الفصل الأول

التَحليل الرياضِي ٣

المحاضرة العاشرة

5 صفحات



الدكتور: معاذ عبد المجيد

التاريخ: 2014/11/06

السرعة، الدقّة والتميُّز

/RedBuildingTeam

لا تنسونا من دعائكم فنحنُ نحتاجه من قلوبكم ♥

طرق حساب الرواسب :

إذا كان الكسر $f=\frac{g(z)}{h(z)}$ حيث $h\,,g$ تحليليان عند $z=a$ ، $g(a)\neq 0$ ، $h(a)=0$

$\Leftarrow$ $z=a$ شاذة غير قابلة للإزالة.

نميز الحالات التالية:

- إذا كان $h'(a)\neq 0 \Leftarrow$ a قطب من الدرجة الأولى (بسيط) ويكون الراسب

$$res(f,a)=\frac{g(a)}{h'(a)}$$

- إذا كان $h'(a)=0$ بينما $h''(a)\neq 0 \Leftarrow$ a قطب من المرتبة (٢)
- $f(z)=\frac{g(z)}{(z-a)^n}$ $\Leftarrow$ (ينعدم المقام عند كل المشتقات بالنسبة للنقطة a إلا المشتق النوني)

$h^{(n)}(z)=n!\neq 0 \Leftarrow$ a قطب من المرتبة n

$$res(f,a)=\frac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$$

مثال (١): عين وصنف النقاط الشاذة وعين الراسب $\boldsymbol{f(z)=\cot(z)}$

الحل:

$$f(z)=\frac{\cos(z)}{\sin(z)}=\frac{g}{h}$$

$h\,,g$ تحليليان دوماً ، النقاط الشاذة $z=\pi k : k\in z$

$$g(\pi k)=(-1)^k$$

$$h'=\cos z \Rightarrow h'(\pi k)\neq 0$$

حسب الحالة الأولى $z=\pi k$ أقطاب بسيطة لـ f

$$res(f,\pi k)=\frac{g(\pi k)}{h'(\pi k)}=\frac{(-1)^k}{(-1)^k}=1$$

$$(z-1)^2 2!)$$

مثال (٢): عين وصنف النقاط الشاذة للتابع واحسب الراسب

$$f(z)=z\cos(\frac{1}{z-1})$$

النقاط شاذة $z=1$ (أساسية)

$$f=[(z-1)+1][1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}+\cdots]$$

نشر بجوار $z=1$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

$$= (z-1) + 1 - \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{2(z-1)^2} \dots\dots\dots$$

تحليلي | ⟶ رئيسي

$$res(f,1) = -\frac{1}{2}$$

مثال (٣):

$$f = \frac{1}{z^3(z^2+1)}$$

الحل:

$z = 0$ قطب من المرتبة ٣

$z = \pm i$ قطبان بسيطان

$$z = 0 \Rightarrow f = \frac{\frac{1}{z^2+1}}{z^3} = \frac{g(z)}{z^3}$$ " الحالة الثالثة "

$$res(f,0) = \frac{g''(0)}{2!} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$z = i \Rightarrow f = \frac{\frac{1}{z^3}}{z^2+1} \Rightarrow res(f,+i) = \frac{\frac{1}{i^3}}{2i} = \frac{1}{2}$$

$$z = -i \Rightarrow f = \frac{\frac{1}{z^3}}{z^2+1} \Rightarrow res(f,-i) = \frac{\frac{1}{(-i)^3}}{-2i} = \frac{1}{2}$$

مبرهنة الرواسب:

ليكن $f(z)$ تحليلي في المنطقة المغلقة D المحاطة بـ L (مستمر وبسيط) باستثناء عدد من النقاط الشاذة الغير قابلة للإزالة $z_1, z_2, \dots\dots z_n$ عندئذ

$$\oint_L f\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} [res(f, z_k)]$$

مثال (١) "دورة" :

$$I = \int_{||z-1||=1} \frac{dz}{z^6+1}$$

خطوات الحل

١) الرسم

٢) إيجاد المنطقة التي يكون التابع فيها تحليلياً .

التابع تحليلي عدا حلول المعادلة

$$z^6 + 1 = 0 \Rightarrow z^6 = -1 = e^{i(\pi+2\pi k)}$$

$$\Rightarrow z = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k\right)} \ : k \in z$$

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$z_2 = e^{i\frac{5}{6}\pi}$$

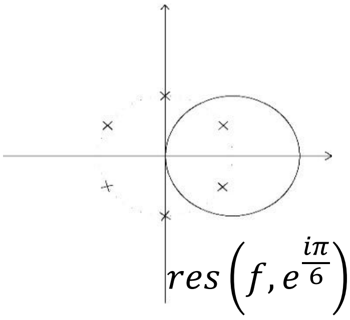
$$z_3 = \overline{z_0} = e^{i\frac{7}{6}\pi} = e^{-i\frac{5}{6}\pi}$$

$$z_4 = \overline{z_1} = e^{\frac{i3}{2}\pi} = -i$$

$$z_5 = \overline{z_2} = e^{\frac{i11}{6}\pi} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

٣) **نمثل النقاط على الرسم .**

(للمساعدة في معرفة مواقع الجذور دون اللجوء إلى الحل الجبري نرسم دائرة نصف قطرها (١) ومركزها O ونحدد عليها الجذور حسب زاويتها حيث تقع الجذور على محيط الدائرة)



f تحليلي في $||z-1|| \leq 1$ باستثناء z_0 , z_5

$$res\left(f, e^{\frac{i\pi}{6}}\right) = \frac{g(e^{i\frac{\pi}{6}})}{h'(e^{i\frac{\pi}{6}})} = \frac{1}{6e^{5i\frac{\pi}{6}}}$$

$$res\left(f, e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{g(e^{i\frac{\pi}{6}})}{h'(e^{i\frac{\pi}{6}})} = \frac{1}{6e^{-\frac{5}{6}\pi i}}$$

نستخدم نظرية الرواسب

$$I = \frac{2}{3}\pi i\left(\frac{1}{6e^{-\frac{5}{6}\pi i}} + \frac{1}{6e^{-\frac{5}{6}\pi i}}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\pi i\left(\frac{e^{-\frac{5}{6}\pi i} + e^{\frac{5}{6}\pi i}}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\pi i \cos\frac{5}{6}\pi = -\frac{\pi i}{\sqrt{3}}$$

مثال(٢):

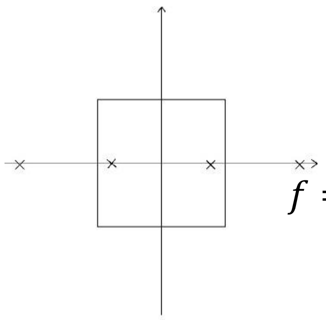
$$I = \oint_L \frac{dz}{\frac{1}{2} - \sin^2(\frac{z}{2})}$$ حيث L مربع رؤوسه النقاط $\pm 2 \pm i$

النقاط الشاذة $\frac{1}{2} - \sin^2\frac{z}{2} = 0$

$$\Rightarrow f = \frac{2}{\cos z} \qquad \frac{\cos z}{2} = 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in z$$

L أملس جزئياً

fتحليلي على المربع وداخله باستثناء النقطتين $\pm\frac{\pi}{2}$



$$f=\frac{2}{\cos z}=\frac{g}{h}\quad,\quad h'=-\sin z\Rightarrow\begin{cases}h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1\\ h'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1\end{cases}$$

$$res\left(f,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h'\left(\frac{\pi}{2}\right)}=-2$$

$$res\left(f,-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{g\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{h'\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=2$$

$$I=2\pi i(-2+2)=0$$

مثال ٣:

$$\boldsymbol{I=\oint_{||z||=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)\cosh\frac{1}{z}\,dz}$$

f شاذة للتابع $z=0$

$$f=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(1+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{4!\,z^4}+\cdots\right)$$

$$=z+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{2z^3}+\cdots$$

z تحليلي و $\frac{1}{z}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{2z^3}+\cdots$ رئيسي $\Leftarrow$ $z=0$ شاذة أساسية للتابع f.

f تحليلي في القرص $||z||\le 0$ باستثناء النقطة $z=0$ وبالتالي يمكن تطبيق نظرية الرواسب

$$res(f,a)=\frac{3}{2}$$

$$I=2\pi i\left(\frac{3}{2}\right)=3\pi i$$

تطبيقات نظرية الرواسب في حساب التكاملات الحقيقية

ا. التكامل من الشكل:

$$I=\int_{0}^{2\pi} f(\cos\theta ,\sin\theta)d\theta$$

حيث f كسر جبري عادي

ملاحظة: شرط ضروري أن يكون التكامل بين $[0,2\pi]$

$$z=e^{i\theta} \quad : \quad z\in \left||z|\right|=1$$

$$dz=ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow d\theta=\frac{dz}{ie^{iz}}=\frac{dz}{iz}$$

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}$$

$$I=\oint_{||z||=1}\frac{f(z)dz}{iz}$$: f كسر جبري عادي في z

ملاحظة: يجب أن يكون الناتج طبيعي (لا يحتوى i).

مثال:

$$I=\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}$$

$$3-2\cos\theta+\sin\theta=3-\left(z+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

$$=\frac{1}{2iz}(6iz-2iz^2-2i+z^2-1)$$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

$$I = \oint_{||z||=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{1}{2iz}\left((1-2i)z^2 + 6iz - 2i - 1\right)}$$

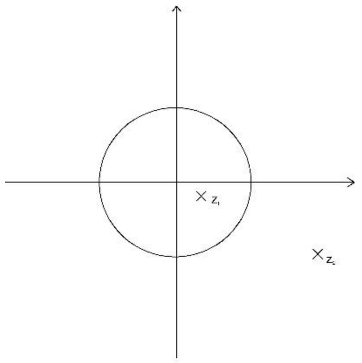
$$= 2\oint_{||z||=1} \frac{dz}{(1-2i)z^2 + 6iz - 2i - 1}$$

نحل حسب مبرهنة الرواسب

$$\Delta = (6i)^2 - 4(1-2i)(-2i-1)$$

$$= -36 + 20 = -16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm i4$$

$$\Rightarrow z = \frac{-6i \mp 4i}{2(1-2i)} = \begin{cases} z_1 = -\frac{i}{1-2i} = \frac{2-i}{5} \\ z_2 = -\frac{5i}{1-2i} = 2-i \end{cases}$$



f تحليلي في $||z|| \leq 1$ باستثناء القطب البسيط z_1

$$f = \frac{1}{(1-2i)z^2 + 6iz - 2i - 1} = \frac{g}{h}$$

$$h'(z) = (1-2i)z + 6i$$

$$h'(z_1) = 4i$$

$$res(f, z_1) = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$$

$$I = 2\pi i(2)\left(-\frac{i}{4}\right) = \pi$$

مثال:

$$\boldsymbol{I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x}{5 - 4\cos x} dx}$$

$$z = e^{ix} : z \in ||z|| = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$f=\frac{\cos 2x}{5-4\cos x}=\frac{2\cos^2 x-1}{5-4\cos x}$$

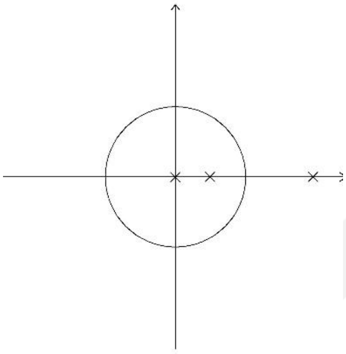
$$=\frac{\frac{1}{2}\left(z^2+2+\frac{1}{z^2}\right)-1}{5-2\left(z+\frac{1}{z}\right)}=\frac{\frac{z^4+1}{2z^2}}{\frac{5z-2z^2-2}{z}}$$

$$=\frac{z^4+1}{2z(5z-2z^2-2)}$$

$$\Rightarrow I=\oint_{||z||=1}\frac{z^4+1}{2z(5z-2z^2-2)}\frac{dz}{iz}$$

$$=\frac{1}{2i}\oint_{||z||=}\frac{z^4+1}{z^2(5z-2z^2-2)}dz$$

النقاط الشاذة:



$z=0$ قطب من الدرجة ٢

حلول المعادلة $5z-2z^2-2=0$ وهي $\frac{1}{2}, 2$ وهما قطبان بسيطان

f تحليلي في القرص $||z||\leq 1$ عدا النقطتن $\frac{1}{2}, 0$

$$z=0\Rightarrow f=\frac{z^4+1}{\frac{-2z^2+5z-2}{z^2}}$$

$$res(f,0)=\frac{g'(0)}{1!}=-\frac{5}{4}$$

$$z=\frac{1}{2}\Rightarrow f(z)=\frac{\left[\frac{z^4+1}{z^2}\right]}{(-2z^2+5z-2)}\Rightarrow res\left(f,\frac{1}{2}\right)=\frac{g}{h'}\Rightarrow$$

$$h'=-4z+5\Rightarrow res\left(f,\frac{1}{2}\right)=\frac{\left[\left(\frac{1}{16}+1\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right]}{-2+5}=\frac{17}{3(4)}$$

الان نكتب قانون الرواسب:

$$I=\frac{1}{2i}\left[2\pi i\left(-\frac{5}{4}+\frac{17}{4(3)}\right)\right]=\frac{\pi}{6}$$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي